1973

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Управление и информатика в технических системах»

В.П. ФЕДЯНИН, Л.Н. ВОРОБЬЁВА, А.И. СЕСЛАВИН

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ САР МЕТОДОМ Д-РАЗБИЕНИЯ ПО ОДНОМУ И ДВУМ ПАРАМЕТРАМ

Методические указания
к лабораторной работе

МОСКВА–2004

ЕНИЯ
ЦИИ

ИВЕРСИТЕТ
Г)

Кафедра “Управление и информатика в технических системах”

В.П. ФЕДЯНИН, Л.Н. ВОРОБЬЕВА, А.И. СЕСЛАВИН

Утверждено
редакционно –издательским
советом университета

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ САР МЕТОДОМ Д-РАЗБИЕНИЯ ПО ОДНОМУ И ДВУМ ПАРАМЕТРАМ

Методические указания к лабораторной работе
по курсу
«ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»

для студентов специальности
«УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ»

МОСКВА- 2004

УДК 681.5.037: 519.718
ФЭ 35

ФЕДЯНИН В.П., СЕСЛАВИН А.И., ВОРОБЬЕВА Л.Н. Исследование устойчивости систем автоматического регулирования методом д-разбиения по одному и двум параметрам: методические указания к лабораторной работе по курсу «Теория автоматического управления». - М.: МИИТ. 2003, - 13с.

В методических указаниях представлен необходимый теоретический материал исследования устойчивости методами Д – разбиения по одному и двум параметрам, сформулированы расчетные задания, даны указания по выполнению лабораторной работы.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ САР МЕТОДОМ Д-РАЗБИЕНИЯ ПО ОДНОМУ И ДВУМ ПАРАМЕТРАМ

1. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Целью лабораторной работы является закрепление знаний студентов в области применения метода Д-разбиения для исследования устойчивости линейных систем управления.

2. ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Впервые задача о разбиении пространства параметров системы (регулятор Уатта) была поставлена и решена И.А. Вышнеградским в 1877 году в статье « О регуляторах прямого действия », которая была помещена в Известиях СПБ Практического института (стр.21 – 62). Вышнеградский (1831 – 1895) был профессором упомянутого Практического института с 1866 года и стал его директором в 1875 году, а в 1887 – 1893 годах служил министром финансов России. Он сыскал себе громкую известность благодаря этой работе, где им найдена область устойчивости в пространстве параметров a и b для уравнения $p^3 + ap^2 + bp + 1 = 0$. Решение задачи было представлено как аналитически так и графически. Последнее с тех пор графический вариант стал называться диаграммой Вышнеградского. Общая постановка задачи Д-разбиения и ее решения были осуществлены Ю.И.Неймарком в 1949 г. в статье «Об определении параметров, при которых система автоматического управления устойчива », А и Т т. 13 № 3, 1948 г. Более полно эти результаты были представлены в монографии этого автора «Устойчивость линеаризованных систем », ЛКВВИА 1949 г. (138 с). В этой работе был развит метод Д – разбиения и применен к расчетам параметрической устойчивости алгебраических и трансцендентных систем.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Как известно, критерий устойчивости Д-разбиение специально предназначен для решения задачи синтеза, т.е. нахождения таких параметров системы, при которых она была бы устойчива.

При проектировании системы считается, что некоторым ее параметрам могут быть приданы произвольные значения, обеспечивающие устойчивость. Реально, критерий Д-разбиение работоспособен, когда число этих параметров равно одному или двум.

Д-РАЗБИЕНИЕ ПО ОДНОМУ ПАРАМЕТРУ

Рассмотрим случай нахождения значения одного из параметров системы из условия устойчивости.

Пусть $G(p) = R(p) + WQ(p) = 0$ характеристическое уравнение исследуемой замкнутой системы, зависящей от одного неизвестного параметра W.

Из предыдущего выражения следует, что:

$$W = -\frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Заменяя $p = j\omega$, получим

$$W = -\frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)}. \tag{1}$$

Зафиксируем $j\omega$ в некоторой точке $j\omega^*$, тогда из выражения (1) получим значение W^*.

Заметим, что если в выражение для $G(p)$ подставить полученные $j\omega^*$ и W^*, то $G(j\omega)$ станет равным нулю. Следовательно, при полученном W^* левая часть характеристического уравнения $G(p)$ имеет чисто мнимый корень, равный р = $j\omega^*$.

Следовательно, если ввести в рассмотрение плоскость параметра W (считая W комплексным параметром) и построить кривую W исходя из соотношения (1), придавая всевозможные значения параметра ω от $-\infty$ до $+\infty$, то полученная кривая (рис.1) будет характерна тем, что если взять любую точку на ней (например, точку A), то окажется, что при таком значении параметра W корень $G(j\omega)$ будет равен ωj_A (заметим, что каждой точке кривой в плоскости W соответствует некоторое фиксированное значение ω).

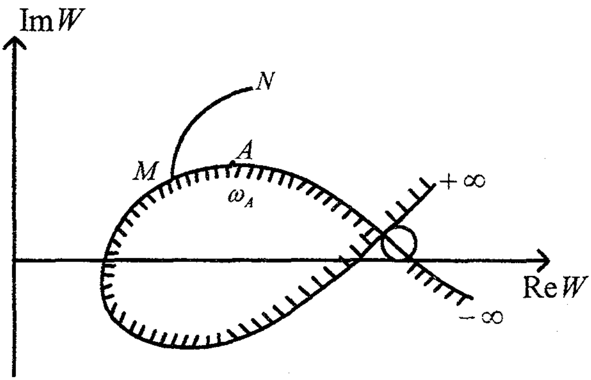

Рис. 1

Следовательно, можно сделать вывод о том, что изображенная на рис.1 кривая есть отображение мнимой оси $(-j\infty - +j\infty)$ в плоскость W.

Можно доказать, что если в плоскость W отображать не мнимую ось, а прямую, параллельную ей и сдвинутую влево на малую величину, то в этой плоскости W прочертится кривая, аналогичная построенной, но сдвинутая также несколько левее последней, если идти вдоль кривой, изображенной на рис.1 от значений $\omega = -\infty$ к значению $\omega = +\infty$. Пространство между этими двумя кривыми заштриховывают.

Поэтому, если на мнимую ось нанести штриховку, так как это показано на рис.2, то в плоскость W она отобразится так, как это показано на рис.1.

Возьмем теперь в плоскости W произвольную точку N. Этой точке соответствует некоторое расположение корней характеристического уравнения. Например, k корней будет находиться в правой полуплоскости плоскости корней, а $n-k$ в левой (n - степень характеристического уравнения).

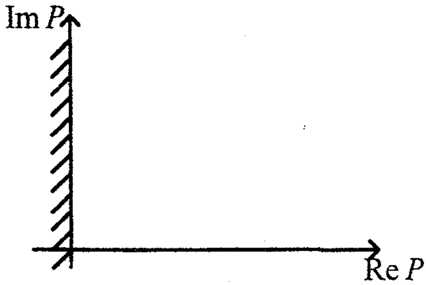

Рис. 2

Будем идти в плоскости W вдоль произвольной траектории (рис.1). Тогда, в тот момент, когда значение W станет равным M, один из корней $G(j\omega)=0$ попадет на мнимую ось, что следует из указанного выше относительно кривой, изображенной на рис. 1. Заметим, что при всех значениях W, лежащих между N и M, перераспределения корней $G(j\omega)=0$ не произойдет, так как корни могут переходить из одной полуплоскости в другую только через мнимую ось.

Если же сдвинуться из точки M дальше, как это изображено на рис.1, то число корней уравнения $G(j\omega)=0$, лежащих справа, уменьшится на единицу. Штриховка является отображением границы левой полуплоскости в плоскость параметра W (сдвиг левой оси влево). Отсюда следует, что переход из не заштрихованной области в заштрихованную приведет к приобретению одного корня в левой полуплоскости. Следовательно, на рис.1 можно выделить область, претендующую на область устойчивости. Это значит что, если параметр W находится в этой области, то наибольшее возможное среди областей число корней $G(j\omega)=0$ находится в левой полуплоскости.

Поэтому, для того, чтобы убедиться, что выделенная область является действительно областью устойчивости, нужно взять любое конкретное значение параметра W, лежащее в ней, и проверить систему на устойчивость по любому из известных критериев. (Например, можно пользоваться критерием Гурвица.)

Разбиение комплексной плоскости на области с помощью кривой, изображенная на рис. 1, называется Д-разбиением плоскости W, а приведенный алгоритм выделения области, претендующей на устойчивость, называется Д-разбиением в плоскости одного комплексного параметра.

Замечание 1.

С помощью метода Д-разбиения может быть решена задача о нахождении области устойчивости в плоскости одного комплексного параметра. Однако, при практических расчетах обычно требуется найти все действительные значения этого параметра, которым отвечает свойство устойчивости характеристического уравнения. Для этого следует выделять отрезки действительной оси в уже сделанном Д-разбиении, соответствующие области устойчивости Д(0).

Д-РАЗБИЕНИЕ ПО ДВУМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРАМ

Пусть теперь неизвестны два действительных параметра μ и δ, которые требуется найти таким образом, чтобы характеристическое уравнение исследуемой системы имело бы корни, лежащие в левой полуплоскости, а, следовательно, система была бы устойчива. В этом случае характеристическое уравнение может иметь вид:

$$G(p) = \mu S(p) + \delta R(p) + Q(p) = 0 . \qquad (2)$$

Заметим, что корни этого уравнения при непрерывном изменении его параметров могут переходить из левой полуплоскости в правую либо через начало координат (это происходит при равенстве нулю свободного члена уравнения (2)), либо при через бесконечность (это может случиться лишь при равенстве нулю коэффициента при старшем члене уравнения (2)), а также при наличии пары чисто мнимых корней у уравнения (2). В первых, двух случаях на плоскости параметров могут возникнуть так называемые « особые » прямые, так как параметры μ и δ водят линейно в уравнение (2). При изменении этих параметров таким образом, что любая из этих прямых пересекается, как правило только один из корней уравнения (2) переходит из левой полуплоскости в правую или обратно.

Для нахождения условий третьего случая перехода корней из левой полуплоскости в правую заменим $p = j\omega$ и выделим вещественные и мнимые части в уравнении (2), т. е.

$$S(j\omega) = S_1(\omega) + jS_2(\omega),$$
$$R(j\omega) = R_1(\omega) + jR_2(\omega),$$
$$Q(j\omega) = Q_1(\omega) + jQ_2(\omega),$$

и (2) можно переписать в следующем виде:

$$\mu S_1(\omega) + \delta R_1(\omega) + Q_1(\omega) = 0,$$
$$\mu S_2(\omega) + \delta R_2(\omega) + Q_2(\omega) = 0. \tag{3}$$

Из (3) следует

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} -Q_1(\omega) & R_1(\omega) \\ -Q_2(\omega) & R_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_1(\omega) & R_1(\omega) \\ S_2(\omega) & R_2(\omega) \end{vmatrix}} \tag{4}$$

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} S_1(\omega) & -Q_1(\omega) \\ S_2(\omega) & -Q_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_1(\omega) & R_1(\omega) \\ S_2(\omega) & R_2(\omega) \end{vmatrix}}. \tag{5}$$

Введем плоскость с осями μ и δ и будем в (4) и (5) менять ω от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда в плоскости «μ - δ» прочертится некоторая кривая, как это показано на рис. 3. Эта кривая есть, что следует из плоскости корней характеристического уравнения, отображение мнимой оси в плоскость «μ - δ». Кривая имеет двойную штриховку (правило штриховки будет дано ниже), так как при вещественных μ и δ, если **G(p)** = 0, имеется ровно два мнимых, комплексно сопряженных корней, вследствие вещественности коэффициентов многочлена **G(p)**.

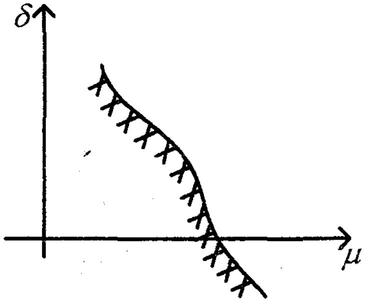

Рис. 3

В случае Д-разбиения по 2-м параметрам возможен особый случай, который состоит в том, что при некоторой ω могут одновременно обратиться в нуль числители и знаменатели (4) и (5), что говорит о том, что уравнения *в* системе (3) являются линейно-зависимыми (при этом ω) и, следовательно, при этом значении ω в плоскости μ и δ должна быть прочерчена прямая. Полученные таким образом прямые также называются особыми.

Отсюда ясно, что осуществление Д-разбиения по двум параметрам, построение принципиально содержит две конструкции - саму кривую и особые прямые.

Приведем без доказательства правила нахождения особых прямых и правила штриховки.

Для нахождения особых прямых свободный член и старший член уравнения $G(p)=0$ приравнивают нулю. При этом получаются уравнения особых прямых. Если при этом получается выражение типа *const*=0, т. е. коэффициент при старшем члене или свободный член не зависят от μ и δ, то прямая не строится.

Если же при некоторой $\omega \neq 0$ и $\omega \neq \infty$ определители обращаются в нуль, то для построения прямой можно использовать любое из выражений системы (3).

Основная кривая штрихуется дважды слева, если ω меняется от 0 до ∞ и главный определитель положителен. Если же $\Delta < 0$, то она штрихуется справа. Штриховка особых прямых иллюстрируется на рис. 4 и рис. 5. Она идет навстречу штриховке основной кривой Д-разбиения.

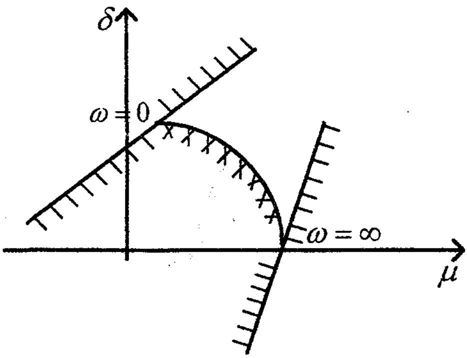

Рис. 4

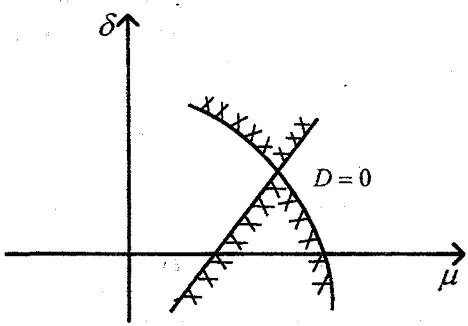

Рис. 5

Замечание 2.

Справедлива следующая формула Орландо:

$\Delta_{n-1}(-1)^m * a_0^{n-1}\Pi(p_i + p_j)$

Где $m = n(n - 1)/2$, Δ_{n-1} -ый определитель матрицы Гурвица характеристического уравнения. p_i и p_j – всевозможные корни этого уравнения. Из формулы Орландо следует, что при наличии у характеристического уравнения пары чисто мнимых корней указанный определитель равен нулю. Поэтому, основная кривая Д-разбиения может быть эффективно получена приравниванием к нулю предпоследнего определителя матрицы Гурвица.

2. ЗАДАНИЕ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ

В качестве примера на Д-разбиение исследуется система, структурная схема которой изображена на рис.6. Ее характеристическое уравнение имеет вид:

$$G(p) = p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k = 0,$$

или $$G(p) = T_1 T_2 p^3 + (T_2 + T_2)p^2 + p + k = 0.$$

Ставится две задачи:

1. $T_1 = 1$ и $T_2 = N$, где N - номер варианта бригады.

Для построения Д-разбиения следует воспользоваться программой FREQ, считая что строится годограф передаточной функции

$$K(p) = 0 - 1 \cdot p - (N + 1)p^2 - Np^3$$

(знаменатель этого выражения формально считать многочленом нулевой степени со свободным членом, равным единице). Программа найдет АФЧХ $k(j\omega)$ в табличном виде. Следует задать изменения логарифма ω в пределах от -1,5 до 0,1 с шагом 0,1. При этом будет получена часть кривой Д-разбиения в области положительных ω. Чтобы получить недостающую ветвь этой кривой, нужно изменить знак полученной мнимой части $K(j\omega)$ (или симметрично отразить полученную на ЭВМ ветвь относительно оси абсцисс).

2. $T_1 = 1$. Из условия устойчивости найти T_2 и k (теперь уже $T_2 \neq N$) и сделать Д-разбиение по этим двум параметрам. Этот расчет может быть сделан как аналитически, так и численно.

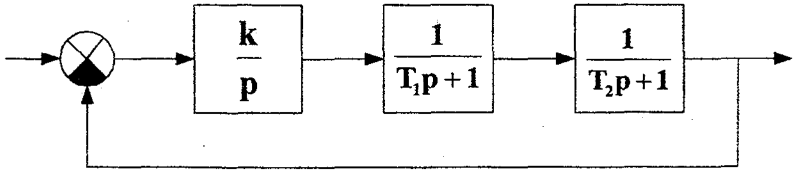

Рис.6

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

1. Сделать Д-разбиение по двум параметрам T_1 и T_2, считая к = 10.
2. Сделать Д-разбиение по одному параметру T_1, считая k = 10, T_2 = 1.
3. Сделать Д-разбиение по параметрам k и T в замкнутой единичной обратной связью системе, в прямой ветви которой находится последовательно включенное усилительное звено k, звено запаздывания на величину T и интегратор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем», ЛКВВИА 1949 г. (138 с).
2. Под редакцией В. В. Солодовникова. Техническая кибернетика. Т.1.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебно-методическое издание

Федянин Валерий Петрович
Сеславин Андрей Игоревич
Воробьева Людмила Николаевна

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ САР МЕТОДОМ Д-РАЗБИЕНИЯ ПО ОДНОМУ И ДВУМ ПАРАМЕТРАМ

Методические указания к лабораторной работе

Подписано в печать - 03.02.04. Формат 60×84/16 Тираж-100.

Усл. печ. л. - 1,0. Заказ - 113. изд.№ 115-04. Цена - 6руб.50к.

127994, Москва, ул. Образцова, 15
Типография МИИТа